

Roll No. ....

# 111-N

## B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2019

(New Course)

MATHEMATICS

Paper Second

(Calculus and Differential Calculus)

Time : Three Hours ]

[ Maximum Marks : 65

नोट : सभी खण्डों से निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Attempt questions from all Sections as directed.

निर्देश : अभ्यर्थी प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार लिखें। यदि किसी प्रश्न के कई भाग हों तो उनके उत्तर एक ही तारतम्य में लिखे जाएँ।

The candidates are required to answer only in serial order. If there are many parts of a question, answer them in continuation.

खण्ड—अ

(Section—A)

लघु उत्तरीय प्रश्न

All questions are compulsory. Each question carries 2 marks.

(A)  $\epsilon$ - $\delta$  विधि का प्रयोग कर दर्शाइए कि  $\sin x$ ,  $x$  के प्रत्येक मान के लिए संतत है।

By using  $\epsilon$ - $\delta$  method show that  $\sin x$  is continuous for every value of  $x$ .

(B) लैग्रान्ज के मध्यमान प्रमेय की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

Write geometrical interpretation of Lagrange's mean value theorem.

(C)  $y = \cos 2x \cos 3x$  का  $n$ वाँ अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

Find the  $n$ th derivative of the function  $y = \cos 2x \cos 3x$ .

(D) टेलर प्रमेय द्वारा  $2x^3 + 7x^2 + x + 1$  का प्रसार  $x - 2$  की घातों में लिखिए।

Expand  $2x^3 + 7x^2 + x + 1$  in powers of  $x - 2$  by Taylor's theorem.

(E) मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)^{\frac{1}{x}}$$

Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)^{\frac{1}{x}}$$

(F) यदि  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

If  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , then prove that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(G) यदि  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , तो  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$  का मान

ज्ञात कीजिए।

If  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , then find the value of

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$$

(H) वक्र  $y = a \log \sec\left(\frac{x}{a}\right)$  के बिन्दु  $(x, y)$  पर वक्रता त्रिज्या

ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature at the point  $(x, y)$  on

the curve  $y = a \log \sec\left(\frac{x}{a}\right)$ .

(I) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^c}{c^x} dx = \frac{\Gamma(c+1)}{(\log c)^{c+1}}, \quad c > 1$$

Prove that :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^c}{c^x} dx = \frac{\Gamma(c+1)}{(\log c)^{c+1}}, \quad c > 1$$

(J) वृत्त  $r = 2a \cos \theta$  की परिधि ज्ञात कीजिए।

Find the perimeter of the circle  $r = 2a \cos \theta$ .

खण्ड—य

(Section—B)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं दो प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Attempt any two questions. Each question carries 10 marks.

2. (अ) दर्शाइए कि फलन  $f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3|$   $x=1$  तथा  $x=2$  पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

Show that the function :

$$f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3|$$

is continuous at  $x=1$  and  $x=2$  but not differentiable.

(ब) अन्तराल  $[a, b]$  में रोल्ले के प्रमेय का फलन

$$f(x) = \log \frac{x^2 + ab}{(a+b)x}$$

Verify Rolle's theorem for the function

$$f(x) = \log \frac{x^2 + ab}{(a+b)x} \text{ in } [a, b].$$

3. (अ) यदि  $x = \sin\left(\frac{\log y}{a}\right)$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$$

तथा  $(y_n)_0$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $x = \sin\left(\frac{\log y}{a}\right)$ , then show that :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$$

and find  $(y_n)_0$ .

(ब) टेलर प्रमेय द्वारा सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}(x + h) = \tan^{-1} x + h \sin z \frac{\sin z}{1} - (h \sin z)^2 \frac{\sin 2z}{2} + (h \sin z)^3 \frac{\sin 3z}{3} - \dots$$

जहाँ  $z = \cot^{-1} x$

Use Taylor's theorem to prove that :

$$\tan^{-1}(x + h) = \tan^{-1} x + h \sin z \frac{\sin z}{1} - (h \sin z)^2 \frac{\sin 2z}{2} + (h \sin z)^3 \frac{\sin 3z}{3} - \dots$$

where  $z = \cot^{-1} x$ .

4. (अ)  $a, b$  तथा  $c$  के मान ज्ञात कीजिए यदि :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - b \cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2.$$

Find the values of  $a, b$  and  $c$  in order that :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - b \cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2.$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{e^x}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

Prove that :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{e^x}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

(अ) यदि  $\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2(xu_x + yu_y + zu_z)$$

If  $\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1$ , then prove that :

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2(xu_x + yu_y + zu_z)$$

(ब) यदि  $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{144} (13 + \tan^2 u)$$

If  $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ , then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{144} (13 + \tan^2 u)$$

खण्ड—C

(Section—C)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं दो प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Attempt any two questions. Each question carries 10 marks.

- 6 (अ) दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  का पीडल रूप ज्ञात कीजिए।

Find the Pedal form of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

- (ब) वक्र  $r = a(1 + \cos \theta)$  की ध्रुव से जाने वाली वक्रता त्रिज्या की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Find the length of chord of curvature passing through the pole for the curve  $r = a(1 + \cos \theta)$ .

- 7 (अ) वक्र  $(x-2)^2 = y(y-1)^2$  पर द्विक बिन्दु की स्थिति तथा प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Find the position and character of double points of the curve  $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ .

- (ब) वक्र  $y(x^2 - 1) = x^2 + 1$  का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve  $y(x^2 - 1) = x^2 + 1$ .

8. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$\Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m), \quad m > 0$$

Prove that :

$$\Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m), \quad m > 0$$

- (ब) रचनाकलन का क्रम बदलिए :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dx dy$$

Change the order of integration :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dx dy$$

वक्रों  $x^2 + y^2 = 2ax$  तथा  $y^2 = ax$  से परिवद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area enclosed by the curves  $x^2 + y^2 = 2ax$  and  $y^2 = ax$ .

इदयाम  $r = a(1 + \cos \theta)$  आरम्भिक रेखा के परितः भ्रमण करता है। जनित ठोस का आयतन तथा पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

The cardioid  $r = a(1 + \cos \theta)$  revolves about the initial line. Find the volume and surface of the solid generated.