

Roll No. 1081399.....

0302

**B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2020**

(New Course)

MATHEMATICS

Paper Second

(Calculus)

*Time : Three Hours ] [ Maximum Marks : 65*

नोट : सभी खण्डों से निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Attempt questions from all Sections as directed.

निर्देश : अभ्यर्थी प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार लिखें। यदि किसी प्रश्न के कई भाग हों तो उनके उत्तर एक ही तारतम्य में लिखे जाएँ।

The candidates are required to answer only in serial order. If there are many parts of a question, answer them in continuation.

खण्ड—अ

(Section—A)

लघु उत्तरीय प्रश्न

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न  $2\frac{1}{2}$  अंक का है।

(A-61) P. T. O.

All questions are compulsory. Each question carries  $2\frac{1}{2}$  marks.

(A)  $(\epsilon - \delta)$  परिभाषा का प्रयोग कर दर्शाइए कि :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}, x \neq a$$

का मान  $2a$  के बराबर है।

Using  $(\epsilon - \delta)$  definition, show that :

easy note

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}, x \neq a$$

is equal to  $2a$ .

(B) एक फलन का उदाहरण दीजिए जो कि सतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

Give an example of a function which is continuous but not differentiable.

(C) रोल्ले प्रमेय का प्रकथन कीजिए।

State Rolle's theorem.

(D)  $\cos^4 x dx$  का 20वाँ अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

Find the 20th differential coefficient of  $\cos^4 x dx$ .

(E)  $\sin x$  का मैक्लॉरिन श्रेणी से  $x$  की घातों में प्रसार कीजिए।

Expand  $\sin x$  in the power of  $x$  by Maclaurin's series.

(F) वक्र  $r^3 = 2ap^2$  की बिन्दु  $(p, r)$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature of curve  $r^3 = 2ap^2$  at the point  $(p, r)$ .

(G) वक्र  $y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$  की x-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

easy note  
Find the asymptotes parallel to x-axis of the curve  $y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$ .

(H) यदि  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , तो  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$  का मान

ज्ञात कीजिए।

easy note  
If  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , then find the value of  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ .

(I)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{3n} \frac{1}{n+r}$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{3n} \frac{1}{n+r}$ .

(J) वक्र  $r = a(1 + \cos \theta)$  की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

note Find the length of the curve  $r = a(1 + \cos \theta)$ .

खण्ड—ब

(Section—B)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

5 : किन्हीं दो प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Attempt any two questions. Each question carries 10 marks.

a) दर्शाइए कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

बिन्दु  $x = 0$  पर अवकलनीय नहीं है।

Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is not differentiable at  $x = 0$ .

यदि  $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ , तो सिद्ध कीजिए :

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y_n = 0$$

तथा  $(y_n)_0$  ज्ञात कीजिए।

If  $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ , show that :

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y_n = 0$$

and find  $(y_n)_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

$$\text{Evaluate } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(b) यदि :

$$x + y + z = u, \quad y + z = uv, \quad z = uvw$$

तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2v.$$

If:

$$x + y + z = u, \quad y + z = uv, \quad z = uvw$$

4 note

then show that :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2v.$$

(a) यदि  $u = f(r)$  जहाँ  $r^2 = x^2 + y^2$ , तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

If  $u = f(r)$  where  $r^2 = x^2 + y^2$ , show that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

(b)  $2x^3 + 7x^2 + x - 1$  का प्रसार  $(x - 2)$  की घातों में कीजिए।

note

Expand  $2x^3 + 7x^2 + x - 1$  in powers of  $(x - 2)$ .

(a) फलन  $u = x^3 + y^3 - 3axy$  के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ का परीक्षण कीजिए।

note

Examine the maxima and minima of the function

$$u = x^3 + y^3 - 3axy.$$

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

Prove that :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

खण्ड—स

(Section—C)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

टिप : किन्हीं दो प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Attempt any *two* questions. Each question carries 10 marks.

(a) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के लिए

$\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$  है, जहाँ  $p$  केन्द्र से दीर्घवृत्त की बिन्दु  $(x, y)$

पर स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

*note* Prove that for the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$ ,

where  $p$  is the length of perpendicular from centre upon the tangent at  $(x, y)$ .

(A-61)

(b) वक्र :

$$y^2(a+x) = x^2(a-x), a > 0$$

का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve :

Easy note

$$y^2(a+x) = x^2(a-x), a > 0$$

7. (a) वक्र  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$ , जहाँ  $\alpha$  एक प्राचल है, का एनवेलप ज्ञात कीजिए।

Find the envelope of  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$ , where  $\alpha$  is a parameter.

- (b)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए।

Find asymptotes of  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

- (a) यदि  $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx, n > 0$ , तो सिद्ध कीजिए

कि :

$$I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$$

तथा  $\int_0^a (a^2 - x^2)^3 dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

(A-61) P. T. O.

✓ If  $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$ ,  $n > 0$ , then prove that :

$$I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$$

and find  $\int_0^a (a^2 - x^2)^3 dx$ .

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx, m > 0, n > 0$$

Prove that :

Easy note

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx, m > 0, n > 0$$

(9) (a) वृत्त  $r = a\sqrt{2}$  तथा  $r = 2a \cos \theta$  का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Easy note

Find the area common to the circle  $r = a\sqrt{2}$  and  $r = 2a \cos \theta$ .

(b) वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  को  $x$ -अक्ष के परितः भ्रमण कराने से बने ढोस का आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

y note

Find the volume and surface of the solid generated by revolution of the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  about the  $x$ -axis.