

Roll No. ....

[2]

373-N

373-N

**B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2019**

(New Course)

**MATHEMATICS**

Paper Second

(Complex Analysis)

Time : Three Hours ]

[ Maximum Marks : 75

नोट : सभी खण्डों से निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Attempt questions from all Sections as directed.

निर्देश : अभ्यर्थी प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार लिखें। यदि किसी प्रश्न के कई भाग हों तो उनके उत्तर एक ही तारतम्य में लिखे जाएँ।

The candidates are required to answer only in serial order. If there are many parts of a question, answer them in continuation.

खण्ड—अ

(Section—A)

लघु उत्तरीय प्रश्न

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

(A-50) P. T. O.

All questions are compulsory. Each question carries 3 marks.

1. (A) दिखाइये कि फलन  $f(z) = \text{Re}(z)$  कहीं भी अवकलनीय नहीं है जबकि यह  $C$  में हर जगह नरत है।

Show that  $f(z) = \text{Re}(z)$  is nowhere differentiable even though it is continuous in  $C$ .

(B) दिखाइये कि फलन  $w = e^{z^2}$  विश्लेषिक है।

Show that the function  $w = e^{z^2}$  is analytic

(C) निम्न कीजिए कि

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

Prove that :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

(D) श्रेणी  $\frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.5}z^2 + \frac{1.3.5}{2.5.8}z^3 + \dots$  की अभिसारी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of convergence of the series

$$\frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.5}z^2 + \frac{1.3.5}{2.5.8}z^3 + \dots$$

(E) द्विरेखीय प्रतिचित्रण  $w = \frac{(2+i)z - 2}{z+i}$  के नियत बिन्दुओं और सामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

Find the fixed points and the normal form of the

$$\text{bilinear transformation } w = \frac{(2+i)z - 2}{z+i}$$

(A-50)

- (F) द्विरेखीय प्रतिचित्रण ज्ञात कीजिये, जहाँ  $z_1 = 0, z_2 = -i, z_3 = -1$  एवं  $w_1 = i, w_2 = 1, w_3 = 0$  पर निरूपित करती है।

Find the bilinear transformation which maps  $z_1 = 0, z_2 = -i, z_3 = -1$  into the  $w_1 = i, w_2 = 1, w_3 = 0$ .

- (G) समाकलन  $\int_C z dz$  का मान ज्ञात कीजिये, जबकि सरल रेखा बिन्दु (1,0) से (1,1) तक है।

Evaluate the integral  $\int_C z dz$ , where C is the straight line from the point (1, 0) to the point (1, 1). <http://www.csjmuonline.com>

- (H) कौशी समाकलन सूत्र का प्रयोग करके, निकालिये

$$\int_C \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2 + 1)} dz, \text{ जबकि } C, |z| = 2 \text{ वृत्त है।}$$

Using Cauchy's integral formula, evaluate

$$\int_C \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2 + 1)} dz, \text{ where } C \text{ is circle } |z| = 2.$$

- (I) फलन  $f(z) = \frac{\cot \pi z}{(z-a)^2}$  की विचित्रताओं का प्रकार

$z = a$  और  $z = \infty$  पर ज्ञात कीजिए।

Find the kind of singularity of the function :

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{(z-a)^2} \text{ at } z = a \text{ and } z = \infty.$$

खण्ड—B

(Section—B)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं दो प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 12 अंकों का है।

Attempt any two questions. Each question carries 12 marks.

- 2 (अ) यदि  $f(z) = u + iv, z = x + iy$  का एक वैश्लेषिक फलन है और  $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ , तो  $f(z)$  का  $z$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

If  $f(z) = u + iv$  is an analytic function of  $z = x + iy$  and  $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ , find  $f(z)$  in terms of  $z$ .

- (ब) सिद्ध कीजिये कि यदि पावर श्रेणी  $\sum a_n z^n, z = z_0$  के लिए अभिसारी हो, तो वह ऐसे प्रत्येक  $z$  के मान के लिए अभिसारी होगी जो  $|z| < |z_0|$  को सन्तुष्ट करता हो।

Prove that if the power series  $\sum a_n z^n$  converges for  $z = z_0$ , then it will converge for each  $z$  satisfying  $|z| < |z_0|$ .

- 3 (अ) यदि  $f(z) = u + iv$ , क्षेत्र  $D$  में वैश्लेषिक फलन है, तो सिद्ध कीजिये कि वक्र  $u = \text{अचर}$ ,  $v = \text{अचर}$ , दो लंबिक परिवार हैं।

If  $f(z) = u + iv$  is an analytic function, in domain  $D$ , prove that curve  $u = \text{constant}$ ,  $v = \text{constant}$ , form two orthogonal families.

- (ब)  $z$ -समतल में  $x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$  द्वारा एक क्षेत्र  $R$  है, तब प्रतिचित्रण  $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + (1-2i)$  के अन्तर्गत क्षेत्र  $R$  को  $w$ -समतल में क्षेत्र  $R'$  का मान ज्ञात कीजिए।

A rectangle region  $R$  in the  $z$ -plane is bounded by  $x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$ , determine the region  $R'$  of the  $w$ -plane into  $R$  is mapped under the transformation :

$$w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + (1-2i)$$

- 4 समस्त द्विरेखीय प्रतिचित्रण निकालिए जो अर्द्धसमतल  $\{z \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$  को वृत्त  $|w| = 1$  पर निरूपित करती है।

Find all the bilinear transformation which maps the half plane  $\text{Im}(z) \geq 0$  into circle  $|w| = 1$ .

- 5 सिद्ध कीजिये कि

$$\cosh(z + z^{-1}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$$

जबकि  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cdot \cosh(2 \cos \theta) d\theta$

Prove that

$$\cosh(z + z^{-1}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$$

where  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cdot \cosh(2 \cos \theta) d\theta$ .

खण्ड—स

(Section—C)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्ही दो प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 12 अंकों का है।

Attempt any two questions. Each question carries 12 marks.

6. टेलर तथा लॉरेंट श्रेणियों, फलन  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  हेतु प्राप्त कीजिये, जिनके क्षेत्र :

(i)  $|z| < 1$

(ii)  $1 < |z| < 3$

(iii)  $|z| > 3$

(iv)  $0 < |z+1| < 2$

Find the Taylor and Laurent's series which represent the function  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  in the region :

(i)  $|z| < 1$

(ii)  $1 < |z| < 3$

(iii)  $|z| > 3$

(iv)  $0 < |z + 1| < 2$

7. राउची प्रमेय का प्रयोग करते हुए दिखाइये कि समीकरण  $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ , के सभी मूल वृत्त  $|z| = 1$  तथा  $|z| = 2$  के बीच में हैं।

Use Rouché's theorem to show that all the roots of the equation  $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ , lie between the circle  $|z| = 1$  and  $|z| = 2$ .

8. बीजगणित के मूल प्रमेय का उल्लेख करते हुए सिद्ध कीजिए।  
State and prove Fundamental theorem of Algebra.

9. मान निकालिये

$$\int_0^{2\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, \text{ जहाँ } a > 0$$

Evaluate :

$$\int_0^{2\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, \text{ where } a > 0.$$

http://www.csjmuonline.com

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

50,000

http://www.csjmuonline.com

http://www.csjmuonline.com

http://www.csjmuonline.com