Roll No. ....

373–N

B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2020

(New Course)

MATHEMATICS

Paper Seccnd

(Complex Analysis)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 75*

नोट : सभी खण्डों से निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Attempt questions from all Sections as directed.

निर्देश : अभ्यर्थी प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार लिखें। यदि किसी प्रश्न के कई भाग हों तो उनके उत्तर एक ही तारतम्य में लिखे जाएँ।

The candidates are required to answer only in serial order. If there are many parts of a question, answer them in continuation.

खण्ड—अ

(Section—A)

लघु उत्तरीय प्रश्न

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

All questions are compulsory. Each question carries 3 marks.

1. (A) दिखाइए कि, किसी ना-शून्य मिश्रित संख्या z के लिए, $\{\arg(z)+\arg(\bar{z})\}$ का व्यापक मान $2n\pi$ है, जहाँ n एक पूर्णांक है।

For a non-zero complex number z, show that general value of $\{\arg(z)+\arg(\bar{z})\} = 2n\pi$, where n is an integer.

(B) $\frac{d}{dz}(\bar{z})$ को निकालिये।

Find $\frac{d}{dz}(\bar{z})$.

(C) दिखाइए कि फलन $w=e^{x+iy}$ वैश्लेषिक है।

Show that the function $w=e^{x+iy}$ is analytic.

(D) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n!}$ की अभिसारी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n!}$.

(E) समाकलन

$$I=\int_C \frac{z^2+4z+3}{(z-2)}dz$$

का मान ज्ञात कीजिए, जबकि C वृत्त $|z|=1$ है।

Evaluate the integral

$$I = \int_C \frac{z^2 + 4z + 3}{(z-2)} dz,$$

where C is the circle $|z| = 1$.

(F) फलन :

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$$

के विचित्र बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।

Find the singular points of the function :

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}.$$

(G) द्विरेखीय प्रतिचित्रण को ज्ञात कीजिए, जो कि $z_1 = 2$, $z_2 = i$ एवं $z_3 = -2$ को क्रमशः $w_1 = 1$, $w_2 = i$ एवं $w_3 = 1$ पर निरूपित करता है।

Find the bilinear transformation which maps $z_1 = 2$, $z_2 = i$ and $z_3 = -2$ respectively to $w_1 = 1$, $w_2 = i$ and $w_3 = 1$.

(H) फलन $f(z) = \log_e (1+z)$ को टेलर श्रेणी में विस्तारित कीजिए।

Expand the function $f(z) = \log_e (1+z)$ in Taylor series.

(I) $z=\infty$, पर फलन $f(z)=\dfrac{z^3}{(z^2-1)}$ के अवशिष्ट ज्ञात कीजिए।

Find the residue of the function $f(z)=\dfrac{z^3}{(z^2-1)}$ at $z=\infty$.

खण्ड—ब

(Section—B)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 12 अंकों का है।

Attempt any *two* questions. Each question carries 12 marks.

2. (a) दिखाइए कि फलन :

$$u=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+1$$

लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है। इसके संगत वैश्लेषिक फलन $f(z)=u+iv$ को ज्ञात कीजिए।

Show that :

$$u=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+1$$

satisfies Laplace equation and find the corresponding analytic function $f(z)=u+iv$.

(b) द्विरेखीय प्रतिचित्रण $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ के नियत बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए तथा इसका सामान्य रूप लिखिए।

Find the fixed points and the normal form of the bilinear transformation $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.

3. (a) दर्शाइए कि एक अचर मापांक वाला वैश्लेषिक फलन; अचर फलन होता है।

Show that an analytic function with constant modulus is a constant function.

(b) प्रतिचित्रण $(w+1)^2 = (4/z)$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि w-तल का एकांक वृत्त, z-तल के एक परवलय एवं वृत्त का आन्तरिक, परवलय के बाहरी भाग के तदनुरूपी होता है।

For the transformation $(w+1)^2 = (4/z)$, prove that unit circle in the w-plane corresponds to a parabola in the z-plane and inside of the circle to the outside of the parabola.

4. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

जबकि :

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cosh(z\cos\theta)\, d\theta \text{ ।}$$

Prove that :

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

where :

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cosh(z\cos\theta)\, d\theta .$$

(b) समाकलन $\int_C (3z + z^2)\,dz$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि C वृत्त $|z| = 2$ का $(2, 0)$ से $(0, 2)$ चाप है।

Find the value of the integral $\int_C (3z + z^2)\,dz$, where C is the arc of the circle $|z| = 2$ from $(2, 0)$ to $(0, 2)$.

5. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक घात श्रेणी, अपने अभिसारी वृत्त अन्तर्गत, एक वैश्लेषिक फलन का निरूपण करती है।

Prove that every power series represents an analytic function within its circle of convergence.

खण्ड—स

(Section—C)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 12 अंकों का है।

Attempt any *two* questions. Each question carries 12 marks.

6. फलन $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ का श्रेणी-विस्तार, निम्नलिखित क्षेत्रों हेतु प्राप्त कीजिए :

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 2$

(iii) $|z| > 2$

Find the series expansion of the function $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ in the following regions :

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 2$

(iii) $|z| > 2$

7. किसी फलन $f(z)$ के एक अनंतक पर अवशिष्ट को परिभाषित कीजिए। कंटूर समाकलन द्वारा दर्शाइए कि :

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

जबकि n का धनात्मक पूर्णांक है।

Define residue at a pole of a function $f(z)$. By contour integration, show that :

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

where n is a positive integer.

8. यदि $f(z)$; किसी बन्द कंटूर C के अन्तर्गत मेरोमार्फिक है तथा C पर कोई 'जीरो' नहीं रखता है तो दर्शाइए कि :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P$$

जबकि N 'जीरोज' की संख्या है, तथा P अनंतकों की संख्या है।

If $f(z)$ is meromorphic inside a closed contour C, then show that :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P$$

where N is the no. of zeros and P is the no. of poles.

9. मान ज्ञात कीजिए :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} \, d\theta$$

Evaluate :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} \, d\theta$$

https://www.csjmuonline.com